MALEN NACH ZAHLEN
GERHARD RICHTERS *4900 FARBEN*

Marcus du Sautoy

Das Werk *4900 Farben* besteht aus 4900 farbigen Quadraten, von denen sich jeweils 25 = 5 x 5 Farbquadrate zu 196 quadratischen Bildern zusammenfügen. In der Ausstellung des Werkes in der Serpentine Gallery, London, stellt Gerhard Richter jeweils 4 Bilder zu einer Tafel zusammen, sodass insgesamt 49 Tafeln aus jeweils 100 = 10 x 10 Quadraten entstehen, die er als *Version II* bezeichnet. Die ursprünglichen 196 Bilder aus jeweils 5 x 5-Farben erzeugte Richter durch Zufallsauswahl aus 25 Farben.

Die Ausstellung steht in Zusammenhang mit Richters Entwurf für ein farbiges Kirchenfenster im Kölner Dom. Im Dom wird durch die Spiegelung der Zufallsauswahl ein wenig Symmetrie gewonnen, wenngleich nach einem komplexem System.

Was einen beim Betrachten der Bilder oder des farbigen Kirchenfensters nicht loslässt, ist die Suche nach Struktur. Sie verlangen geradezu nach einem mathematischen Blickwinkel, wenn man sie würdigen will. Ich bezeichne Mathematiker gerne als Leute, die nach Mustern suchen, und in gewisser Weise sind wir, glaube ich, alle von der Evolution auf die Suche nach Mustern programmiert, um Ordnung in die chaotische Welt um uns herum zu bringen. Viele Psychologen wie C. G. Jung, Hermann Rorschach und Matte Blanco glaubten, dass der Geist so sehr nach Bedeutung, Muster und Symmetrie verlangt, dass man solche Bilder nutzen kann, um einen Einblick in die menschliche Psyche zu erhalten.

Richter ist nicht der erste, der sich bei der Herstellung von Kunst des Zufalls bedient. Auch Mozart hatte nichts dagegen, etwas Zufälligkeit unter die Strukturiertheit seiner Musik zu mischen. Sein *Musikalisches Würfelspiel* ist eine Methode zur Erzeugung eines 16-taktigen Walzers. Das 1792, ein Jahr nach Mozarts Tod, veröffentlichte Stück besteht aus 176 Takten, die in einer 11 x 16-Matrix arrangiert sind. Für jede der 16 Spalten würfelt man, zieht vom Ergebnis 1 ab und entscheidet so, welcher der 11 Takte gespielt wird. Das kompositorische Meisterstück besteht natürlich darin, 176 Takte zu schreiben, die bei jeder beliebigen Kombination einen überzeugenden Walzer ergeben. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt uns, dass einige Würfelergebnisse sehr viel wahrscheinlicher als andere sind: So stehen die Chancen zum Beispiel 1:6, eine 7 zu würfeln, gegenüber 1:36 für eine 12. Einige Takte in Mozarts musikalischem Spiel kommen also mit größerer Wahrscheinlichkeit vor als andere.

Das Verblüffende daran ist, dass mit diesem System 11^{16} verschiedene Walzer erzeugt werden können. Das ergibt die überwältigende Anzahl von 46 Millionen Milliarden Walzern. Nacheinander gespielt, bräuchte man 200 Millionen Jahre, um sie sich alle anzuhören.

(I) WIE VIELE MÖGLICHE BILDER GIBT ES?

(i) Einfache Ziehung. Hier entsteht jedes 5 x 5-Bild, indem Richter einfach die 25 Farben in einem Fünfergitter anordnet. Die Farben wiederholen sich nicht.

Wenn Richter die 25 Farben einfach permutiert, erhält er 25! = 25 x 24 x 23… x 3 x 2 x 1 Möglichkeiten. Das ist eine Zahl mit 26 Stellen.

Würden wir diese alle nebeneinanderlegen, wäre das Ergebnis $7{,}5 \times 10^{21}$ Kilometer lang. Das würde uns nicht nur aus dem Sonnensystem hinausführen, sondern auch aus der Milchstraße, aus dem Bereich der Lokalen Galaxiengruppe und des Lokalen Galaxien-Superhaufens und bis zu den benachbarten Superhaufen. (Unser lokaler Superhaufen heißt Virgo-Superhaufen. Richters Bilder würden bis zum Centaurus-Superhaufen reichen.)

(ii) Vielfache Ziehung (jede Farbe ist in dem Beutel, aus dem gezogen wird, 25 Mal vorhanden) und endlose Ziehung (die Farben werden nach jeder Ziehung in den Beutel zurückgesteckt). Die Bilder in der Serpentine Gallery arbeiten mit der endlosen Ziehung.

In beiden Verfahren kann jedes der 5 x 5 Felder jede der 25 Farben annehmen. Das ergibt 25^{25} verschiedene Bilder, eine Zahl mit 36 Stellen. Legte man sie alle nebeneinander, wäre das Ergebnis $4{,}3 \times 10^{31}$ Kilometer lang und führte uns weit über das sichtbare Universum hinaus. Dessen Ausdehnung beträgt 46 Milliarden Lichtjahre, was $4{,}14 \times 10^{23}$ Kilometern entspricht.[1]

1. http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/cosmic/earth.html

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das Werk in 49 Tafeln von 2 x 2 Bildern anzuordnen?

Es können jeweils willkürlich 4 Bilder kombiniert werden. Diese können auf 4 x 3 x 2 x 1 Arten arrangiert werden, und jedes einzelne Bild kann außerdem in 4 verschiedene Richtungen orientiert werden. Also gibt es für jedes Einzelbild schon $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4^4 = 6144$ unterschiedliche Anordnungen. Die Orientierung wird mit Hilfe eines Würfels entschieden. Die ersten Würfel der Geschichte waren übrigens vierseitig und wurden bei einem Brettspiel gefunden, das auf 2500 v. Chr. datiert. Als Spiel von Ur ist es im Britischen Museum zu sehen.

Insgesamt hätte die Serpentine Gallery also $196! \times 4^4$ verschiedene Ausstellungen gestalten können. Das ist eine unsinnig große Zahl mit 396 Stellen. Das Universum gibt es erst seit $4{,}32989 \times 10^{17}$ Sekunden.

(II) WIE VIELE MÖGLICHE VERSIONEN GIBT ES?

Richter hat 11 Versionen für die Präsentation seiner Bilder vorgesehen. Man kann sich einfach alle 196 Bilder getrennt ansehen, das ist *Version I*. In der Serpentine Gallery ist *Version II* ausgestellt, die 49 Tafeln aus jeweils $2 \times 2 = 2^2$ Einzelbildern umfasst.

Oder man fügt sie alle zu einer riesigen Tafel aus allen 14^2 kleinen Bildern zusammen. Das ist *Version XI*.

Version X besteht aus 4 Tafeln: drei zu je 5^2 Einzelbildern und einem aus 11^2 Einzelbildern.

Es erhebt sich eine interessante Frage: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die 196 Bilder zu größeren quadratischen Einheiten zusammenzufügen? Richter führt 11 solcher Möglichkeiten an *(Version I* bis *Version XI)*. Die meisten der Versionen umfassen Tafeln, die nicht aus einzelnen Bildern bestehen. Neben der ersten Version aus 196 einzelnen Bildern mit je 25 Farben, existiert nur eine Ausnahme. *Version V* besteht aus

$196 = 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2 + 1$.

Das erschien mir ziemlich unbefriedigend. Ich entschloss mich zu ergründen, wie viele Möglichkeiten es gibt, die 196 Bilder zu quadratischen Tafeln von jeweils mindestens 2 x 2 Bildern anzuordnen.

Dafür gibt es 643 Möglichkeiten.

Hier sind als Beispiel zwei, die Richter entgangen sind:

$196 = 12^2 + 6^2 + 4^2$

oder

$196 = 13^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2$.

Die Frage, welche Zahlen als Summe von Quadraten ausgedrückt werden können, geht bereits auf die Antike zurück und war in der Geschichte der Mathematik ein wichtiges Thema.

Pierre de Fermat bewies, dass jede Primzahl, die bei Division durch 4 einen Rest von 1 ergibt, als Summe zweier Quadrate geschrieben werden kann. Zum Beispiel

$13 = 3 \times 4+1 = 2^2+3^2$ oder $41 = 4 \times 10+1 = 4^2+5^2$.

Man kann dies erweitern, um zu zeigen: Wenn man den 1., 3., 5. usw. Primzahlteiler einer Zahl n nimmt und diejenigen dieser Primzahlen, die bei einer Division durch 4 den Rest 3 ergeben, außerdem eine geradzahlige Potenz aufweisen, dann kann die Zahl n als Summe zweier Quadrate beschrieben werden. Als Beispiel diene $2205 = 3^2 \times 5 \times 7^2$. Die Primzahlen 3 und 7 haben jeweils Rest 3, wenn man sie durch 4 teilt, und beide weisen eine geradzahlige Potenz auf. Also kann 2205 als Summe zweier Quadrate geschrieben werden, nämlich $2205 = 21^2 + 42^2$.

Fermat teilte Marin Mersenne diese Entdeckung Weihnachten 1640 mit. Sie benutzte eine Identität, die der indische Mathematiker Brahmagupta im 7. Jahrhundert entdeckt hatte, und die zeigt, dass das Produkt zweier Zahlen, die beide als Summen zweier Quadrate geschrieben werden können, ebenfalls als Summe zweier Quadrate dargestellt werden kann:

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

Zum Beispiel ist

$(1^2 + 4^2)(2^2 + 7^2) = 30^2 + 1^2 = 26^2 + 15^2$.

Fermat war nicht sehr gut darin, seine Beweise aufzuschreiben (wie die Randbemerkung zu seinem letzten Theorem zeigt). Es war dann Leonhard Euler, ein bedeutender Mathematiker des 18. Jahrhunderts, der Fermats Theorem schließlich bewies.

1770 bewies Lagrange, dass jede Zahl als Summe von 4 Quadratzahlen geschrieben werden kann. Und wenn die Zahl nicht die Form $4^k(8m + 7)$ hat, kann sie sogar als Summe von 3 Quadratzahlen dargestellt werden.

Die Frage, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, eine Zahl als Summe von Quadraten zu schreiben, hängt mit wichtigen analytischen Funktionen zusammen, den sogenannten Jacobi-Theta-Funktionen.[2]

2. http://mathworld.wolfram.com/SumofSquaresFunction.html

(III) WIE WAHRSCHEINLICH IST DAS?

Wahrscheinlichkeit kann der Intuition widersprechen. Wie viele Leute, würden Sie sagen, müssten sich in der Serpentine Gallery aufhalten, bevor die Chance, dass zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben, mehr als 50 : 50 beträgt? Die Antwort finden Sie am Ende des Textes.

In wie vielen Reihen würden Sie zweimal dieselbe Farbe nebeneinander erwarten?

Es besteht eine Chance von $(24 / 25)^9 = 0{,}69$, dass innerhalb einer Reihe nicht zweimal dieselbe Farbe nebeneinander vorkommt. In 3 von 10 Reihen sollten wir also zwei Quadrate derselben Farbe nebeneinander finden.

Auf jeder Tafel in der Serpentine Gallery würde man also durchschnittlich 3 Reihen (und 3 Spalten) mit zwei gleichfarbigen Quadraten nebeneinander erwarten.

Wie viele Tafeln gibt es, die dreimal dieselbe Farbe in einer Reihe haben? Man kann erwarten, dass von den 490 Reihen 6 dreimal dieselbe Farbe in einer Reihe aufweisen, ebenso in einer Spalte.

In Wirklichkeit sind es, glaube ich, mehr Reihen als erwartet. Die Spalten zeigen das erwartete Ergebnis.

Überprüfen Sie, wie viele Tafeln 4 Felder mit derselben Farbe hintereinander aufweisen. Wie viele würden Sie erwarten?

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens n Felder einer bestimmten Farbe, zum Beispiel Weiß, zu finden, beträgt:

P (1) = 0,98313	Es sollten 48 mit mindestens 1 sein.
P (2) = 0,912837	Es sollten 45 mit mindestens 2 sein.
P (3) = 0,767857	Es sollten 38 mit mindestens 3 sein.
P (4) = 0,570524	Es sollten 28 mit mindestens 4 sein.
P (5) = 0,371136	Es sollten 18 mit mindestens 5 sein.
P (6) = 0,211625	Es sollten 10 mit mindestens 6 sein.
P (7) = 0,106392	Es sollten 5 mit mindestens 7 sein.
P (8) = 0,0475121	Es sollten 2 mit mindestens 8 sein.

P (9) = 0,00684446 Wahrscheinlich gibt es keine 9 oder mehr nebeneinander liegenden Felder derselben Farbe.

P (10) = 0,00223855

Bei 17 von 49 Tafeln sollte eine Farbe fehlen.

Lösung des Geburtstagsproblems:

In einem Raum mit 23 Menschen ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag haben, höher als 50 : 50.

In einem Raum mit 88 Menschen ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei von ihnen am selben Tag Geburtstag haben, höher als 50 : 50.
In einem Raum mit 187 Menschen ist die Wahrscheinlichkeit, dass vier von ihnen am selben Tag Geburtstag haben, höher als 50 : 50.

Übersetzung aus dem Englischen: Dagmar Mallett

Marcus du Sautoy
ist Mathematiker und Professor for the Public Understanding of Science an der Oxford University.